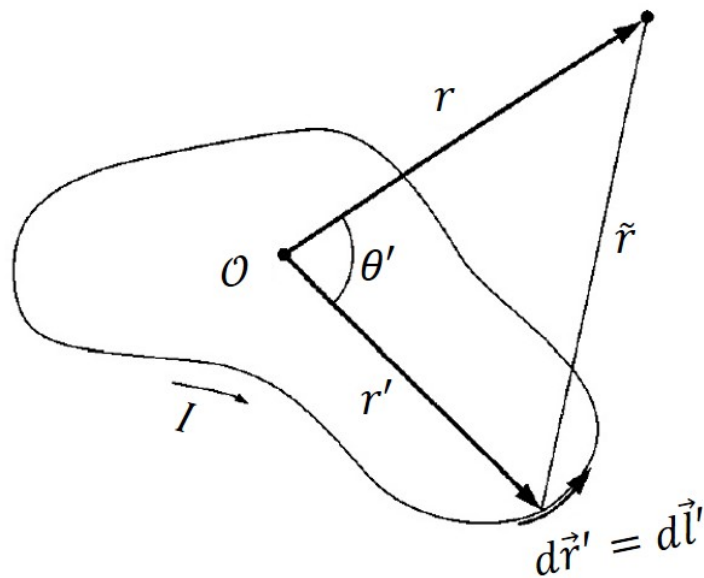


TEMA 2

MAGNETOSTÁTICA EN MEDIOS MATERIALES

1. Expansión multipolar del potencial vector

Considérese un lazo de corriente como el que se muestra en la figura:



$$\frac{1}{\tilde{r}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \theta'}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \theta')$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{1}{r} d\vec{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint (r')^n P_n(\cos \theta') d\vec{l}', \quad (1.1)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \oint d\vec{l}' + \frac{1}{r^2} \oint r' \cos \theta' d\vec{l}' + \frac{1}{r^3} \oint (r')^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta' - \frac{1}{2} \right) d\vec{l}' + \dots \right]$$

Se denomina término monopolar al término que decae de la forma $1/r$. Por otro lado, el término que decae de la forma $1/r^2$, recibe el nombre de término dipolar. Mientras que el término cuadrupolar vendrá constituido por la parte de la expresión que decae de la forma $1/r^3$

Puesto que se cumple que:

$$\oint_C d\vec{l}' = 0 \quad (1.2)$$

no existen monopolos magnéticos en la naturaleza, i.e. $\nabla \cdot \vec{B} = 0$.
Seguidamente, el término dipolar puede expresarse de la forma

$$\vec{A}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint_C r' \cos\theta' \cdot d\vec{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint_C (\hat{r} \cdot \vec{r}') \cdot d\vec{l}' \quad (1.3)$$

Esta integral puede ser reescrita de la forma

$$\oint_C (\hat{r} \cdot \vec{r}') \cdot d\vec{l}' = -\hat{r} \times \oint_S d\vec{s}' \quad (1.4)$$

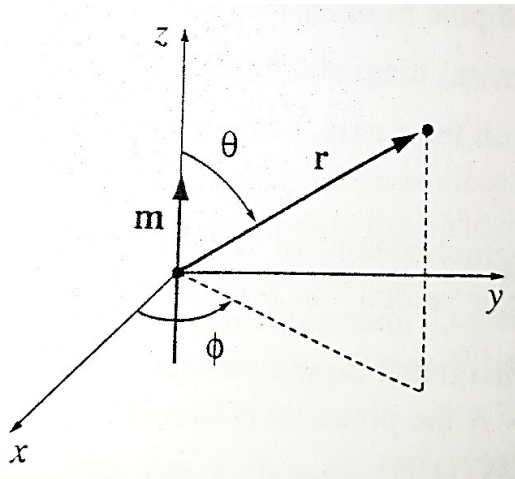
Por lo tanto se obtiene finalmente que

$$\vec{A}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2} \quad (1.5)$$

donde \vec{m} es el **momento dipolar magnético**:

$$\vec{m} = I \int_S d\vec{s} = I\vec{s} \quad (1.6)$$

siendo \vec{s} el área del lazo.



La inducción magnética viene dada por:

$$\vec{B}_{dip}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}_{dip} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta}) \quad (T) \quad (1.7)$$

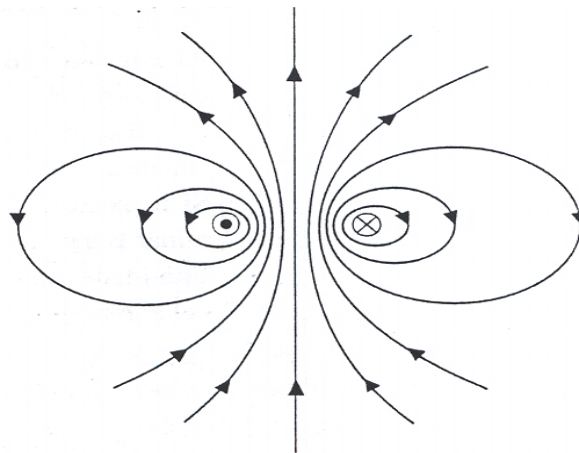
Es preciso en este punto centrar la atención del lector en las enormes similitudes que presentan la expresión (1.7) y la expresión del campo \vec{E} generado por un dipolo eléctrico:

$$\vec{E}_{dip} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta}) \quad (\text{V/m}) \quad (1.8)$$

A continuación, se muestra una tabla donde se ilustra cómo puede establecerse una analogía entre los modelos teóricos que atañen al caso del dipolo eléctrico y al del dipolo magnético.

Dipolo eléctrico	Dipolo magnético
$\vec{p} = q\vec{d}$	$\vec{m} = I\vec{s}$
\vec{E}	\vec{B}
ϵ_0	$1/\mu_0$

La siguiente figura representa las líneas de campo asociadas a un dipolo magnético:



(b) Dipolo magnético.

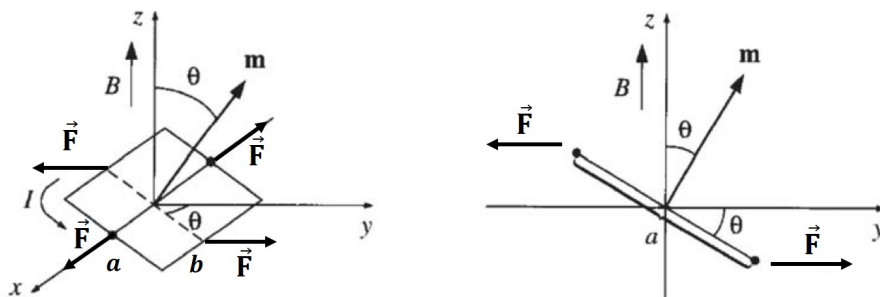


Figura 2.1: Tenemos dos vistas de una espira cuadrada de corriente situada en el seno de un campo magnético. Vemos las fuerzas de Lorentz que sufre cada uno de los lados de la espira. El resultado general es un par de fuerzas que girará la espira.

Cuando un lazo rectangular de dimensiones $a \times b$, por la que fluye una corriente I , se somete a un campo \vec{B} externo que lleva la dirección \hat{z} como se muestra en la figura, las fuerzas sobre los lados inclinados se cancelan (tienden a estirar el lazo, pero no lo rotan). Las fuerzas sobre las caras horizontales son iguales y opuestas (la fuerza neta sobre el lazo es nula) pero generan un par de fuerzas:

$$\vec{T} = aF \text{ sen } \theta \hat{x} \quad (1.9)$$

siendo

$$F = IbB \quad (1.10)$$

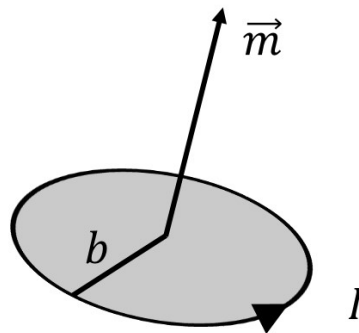
por lo que se tiene que

$$\vec{T} = IabB \text{ sen } \theta \hat{x} = mB \text{ sen } \theta \hat{x} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (1.11)$$

donde $m = Iab$ es el momento dipolar del lazo.

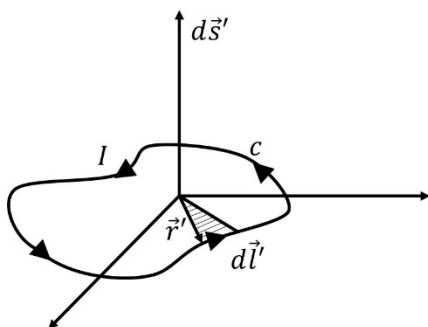
La ecuación (1.11) representa el momento del par de fuerzas de cualquier distribución de corriente en la presencia de un campo \vec{B} uniforme. Dicha ecuación es idéntica en forma a la del momento del par de fuerzas de un dipolo eléctrico en presencia de un campo \vec{E} :
 $\vec{T} = \vec{p} \times \vec{E}$

Al igual que en el caso eléctrico, el par de fuerzas tiende a orientar el momento dipolar \vec{m} en la misma dirección y sentido que el campo externo \vec{B}



Dipolo magnético

Para el caso general de un lazo de corriente,



$$\begin{aligned} \vec{m} &= I\vec{s} \\ \vec{s} &= \frac{1}{2} \oint_c \vec{r}' \times d\vec{l}' \\ &\downarrow \\ \vec{m} &= \frac{1}{2} \oint_c \vec{r}' \times Id\vec{l}' \end{aligned}$$

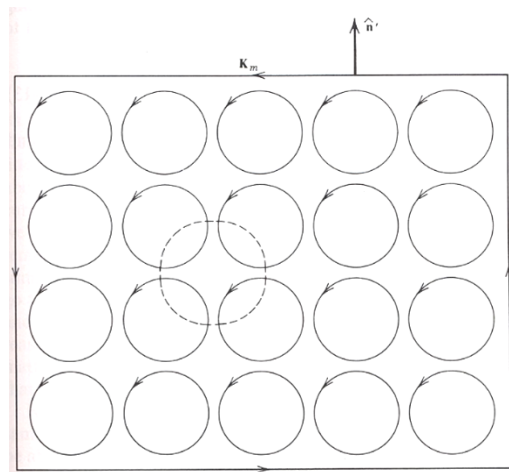
Si analizamos el caso de una distribución volumétrica de corriente, tenemos que

$$Id\vec{l}' \rightarrow \vec{J}dv' \quad \rightarrow \quad \vec{m} = \frac{1}{2} \cdot \int_{v'} \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') dv'$$

$$d\vec{m} = \frac{1}{2} \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') dv'$$

2. Magnetización y densidades de corriente equivalentes

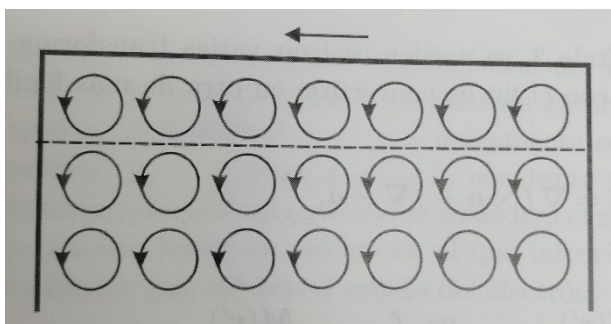
En ausencia de un campo \vec{B} externo los dipolos magnéticos de los átomos, debidos al movimiento orbital de los electrones y a su movimiento de “espín” en torno a su propio eje, tienen orientaciones aleatorias (con excepción de los imanes permanentes), de manera que no hay momento magnético neto. La aplicación de un campo magnético externo ocasiona tanto la alineación de los momentos magnéticos de “espín” como un momento magnético inducido debido a un cambio en el movimiento orbital de los electrones.



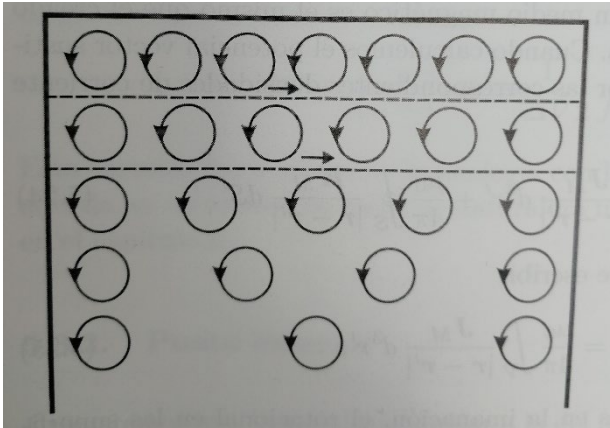
Para determinar el cambio cuantitativo en \vec{B} ocasionado por la presencia de un material magnético, se introduce el vector magnetización a través de la siguiente expresión:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^{n \cdot \Delta v} \vec{m}_k}{\Delta v} \quad (\text{A/m}) \quad (2.1)$$

$n \rightarrow$ número de átomos por unidad de volumen



Interpretación intuitiva de la densidad superficial de corriente equivalente.



Interpretación intuitiva de la densidad volumétrica de corriente equivalente.

De forma análoga al caso de los dieléctricos en presencia de un campo electrostático, se pueden definir la densidad superficial de corriente de magnetización y la densidad volumétrica de corriente de magnetización a través de las siguientes expresiones:

Densidad superficial de carga de polarización: $\rho_{ps} = \vec{P} \cdot \hat{n}$ (C/m²)

Densidad superficial de corriente de magnetización: $\vec{K}_m = \vec{M} \times \hat{n}$ (A/m)

Densidad volumétrica de carga de polarización: $\rho_{pv} = -\nabla \cdot \vec{P}$ (C/m³)

Densidad volumétrica de corriente de magnetización: $\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M}$ (A/m²)

De igual forma que para el caso de los dieléctricos tenemos que modificar el $\nabla \times \vec{B}$ postulado:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_m) = \mu_0 (\vec{J} + \nabla \times \vec{M}) \\ \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) &= \vec{J} + \nabla \times \vec{M} \\ \nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) &= \vec{J} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Podemos definir la intensidad de campo magnético \vec{H} como

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (\text{A/m}) \quad (2.3)$$

Por lo tanto, $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$ (función únicamente de la densidad de corriente libre)

Integrando ambos miembros de la expresión anterior sobre una superficie abierta $\underline{\underline{S}}$ (y una vez aplicado el teorema de Stokes),

$$\int_s \nabla \times \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (2.4)$$

se obtiene la ley circuital de Ampere tanto para medios magnéticos como no magnéticos:

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (A) \quad (2.5)$$

$c \rightarrow$ contorno que limita s

$I \rightarrow$ corriente libre a través de s

Forma general de la ley de Ampere que es independiente del medio magnético que existe dentro del contorno de integración.

3. Permeabilidad relativa y comportamiento de los materiales magnéticos

Si las propiedades magnéticas del medio son lineales e isotrópicas, la magnetización es directamente proporcional a \vec{H} :

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (3.1)$$

χ_m : susceptibilidad magnética (sin dimensiones)

Sustituyendo (3.1) en la expresión (2.3) para el campo \vec{H} :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \\ &= \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \quad (\text{Wb/m}^2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde se ha definido la permeabilidad relativa del medio como la magnitud adimensional:

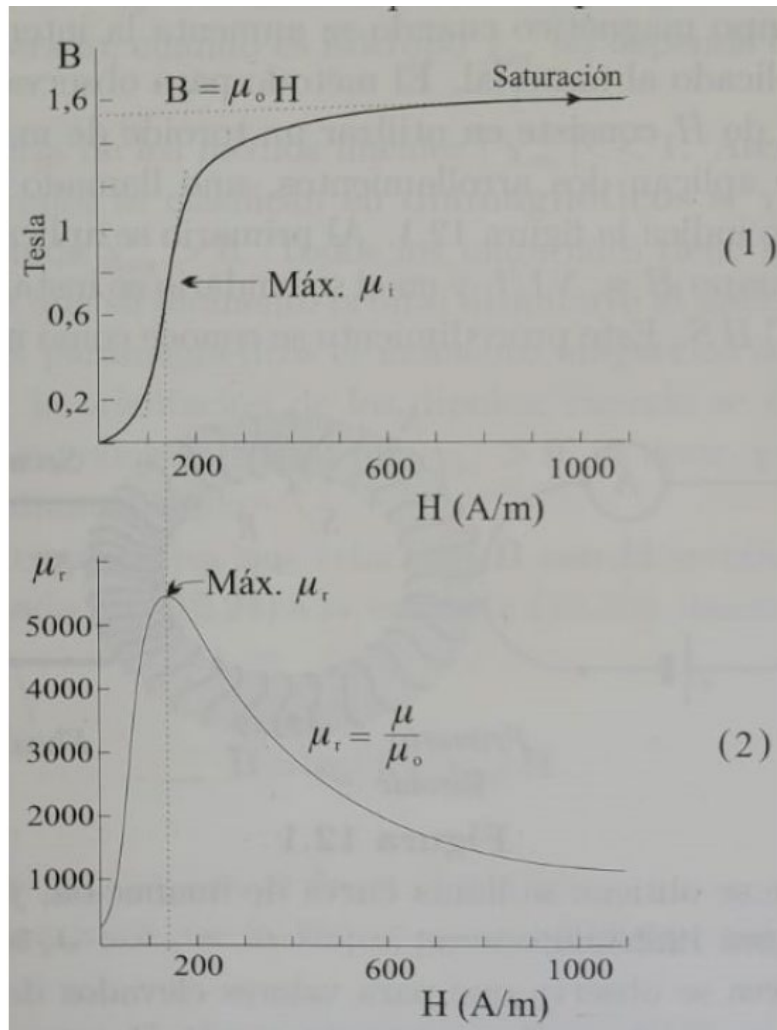
$$\mu_r = 1 + \chi_m = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (3.3)$$

y la permeabilidad absoluta del medio como:

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (\text{H/m}) \quad (3.4)$$

$\mu_r = \mu_r(\vec{r})$; en el caso en el que el medio sea también homogéneo (l. h. i.) entonces χ_m y μ_r son constantes.

Para medios no lineales, el comportamiento es el mostrado en la siguiente figura:



Curva de primera imanación (1) y representación de μ frente a H (2) en un medio no lineal

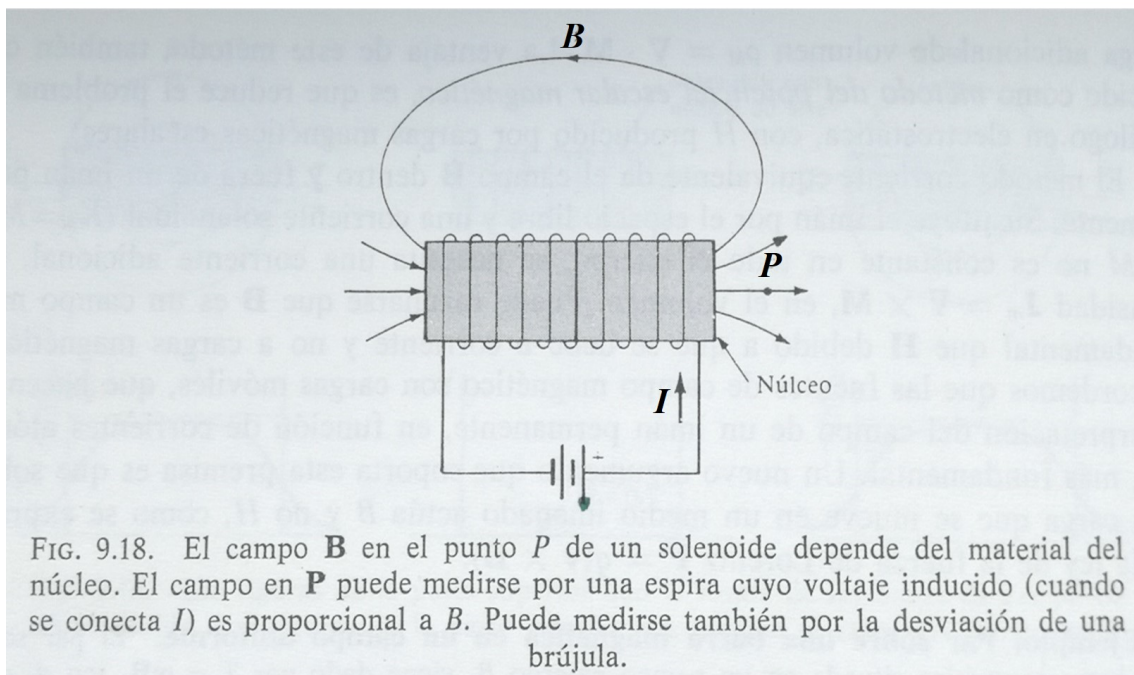


FIG. 9.18. El campo B en el punto P de un solenoide depende del material del núcleo. El campo en P puede medirse por una espira cuyo voltaje inducido (cuando se conecta I) es proporcional a B . Puede medirse también por la desviación de una brújula.

Caractericemos los materiales magnéticos en función del efecto que tienen sobre la inducción magnética en un solenoide como el mostrado en la figura. Cuando no está presente ningún material magnético dentro del solenoide, esto es, cuando el solenoide únicamente esté relleno por aire, el campo en el punto P es B_0 . Introduciendo varios materiales en el núcleo, se podrá observar como B_0 pasará a ser B . Podemos establecer entonces una clasificación de los diferentes materiales magnéticos, atendiendo al valor de este campo B del siguiente modo:

- Diamagnético, si $\frac{B}{B_0} \leq 1$
- Paramagnético, si $\frac{B}{B_0} \geq 1$
- Ferromagnético, si $\frac{B}{B_0} \gg 1$

Dividiendo $B = \mu H$ entre $B_0 = \mu_0 H$ se llega a:

$$\frac{B}{B_0} = \frac{\mu}{\mu_0} = \mu_r \quad (3.5)$$

Por todo ello, de manera general, los materiales magnéticos pueden clasificarse en tres grupos y esta clasificación atenderá a los valores que tome μ_r :

Diamagnético: $\mu_r \leq 1$ (χ_m n° negativo muy pequeño)

Paramagnético: $\mu_r \geq 1$ (χ_m n° positivo muy pequeño)

Ferromagnético: $\mu_r \gg 1$ (χ_m n° positivo muy grande)

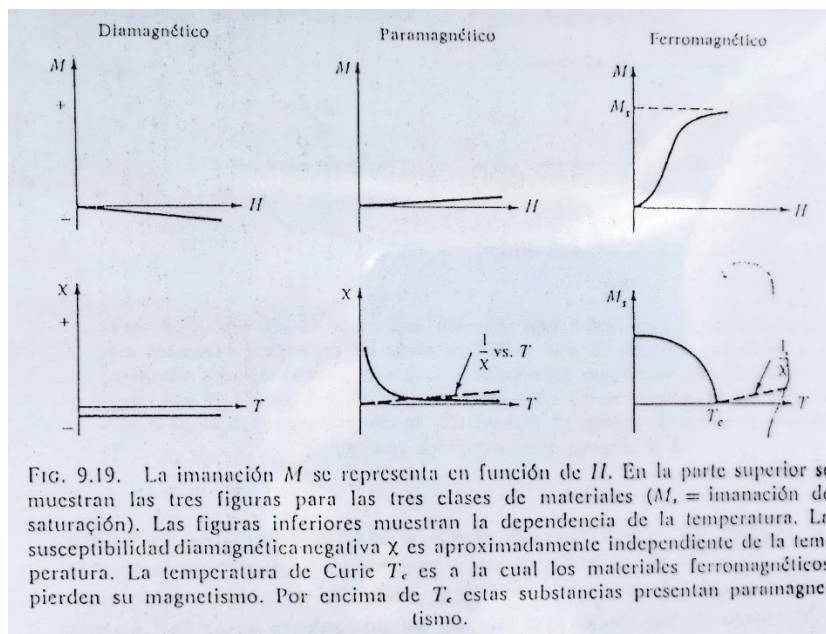
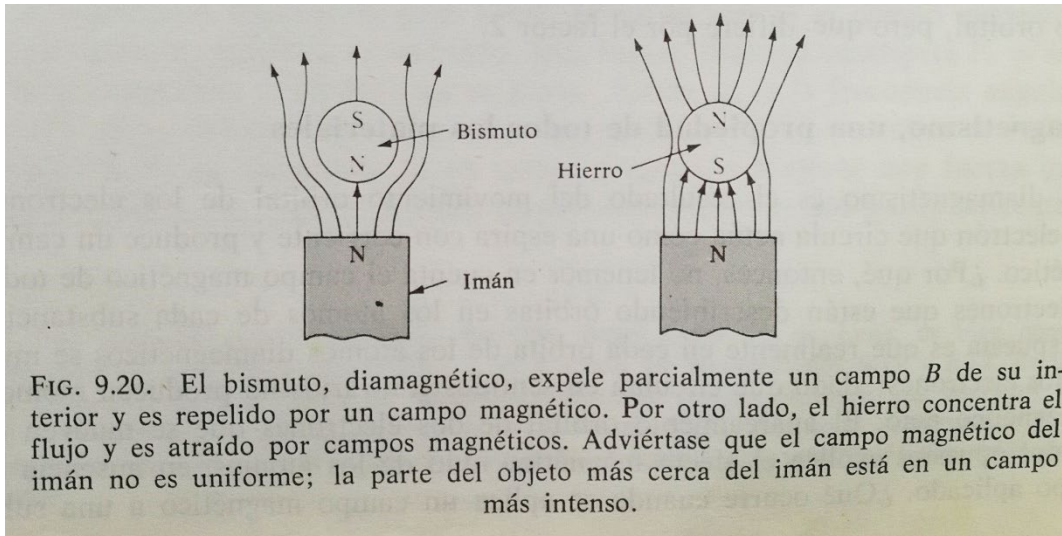


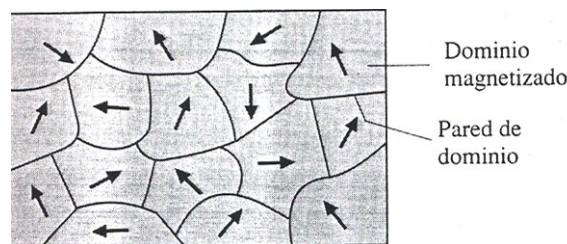
FIG. 9.19. La imanación M se representa en función de H . En la parte superior se muestran las tres figuras para las tres clases de materiales (M_s = imanación de saturación). Las figuras inferiores muestran la dependencia de la temperatura. La susceptibilidad diamagnética negativa χ es aproximadamente independiente de la temperatura. La temperatura de Curie T_c es a la cual los materiales ferromagnéticos pierden su magnetismo. Por encima de T_c estas sustancias presentan paramagnetismo.

Los materiales paramagnéticos y ferromagnéticos son atraídos hacia los campos \vec{B} , mientras que los diamagnéticos se sienten repelidos. Es por ello que, consecuentemente, puede hacerse levitar objetos diamagnéticos cuando se les aplica un campo \vec{B} .



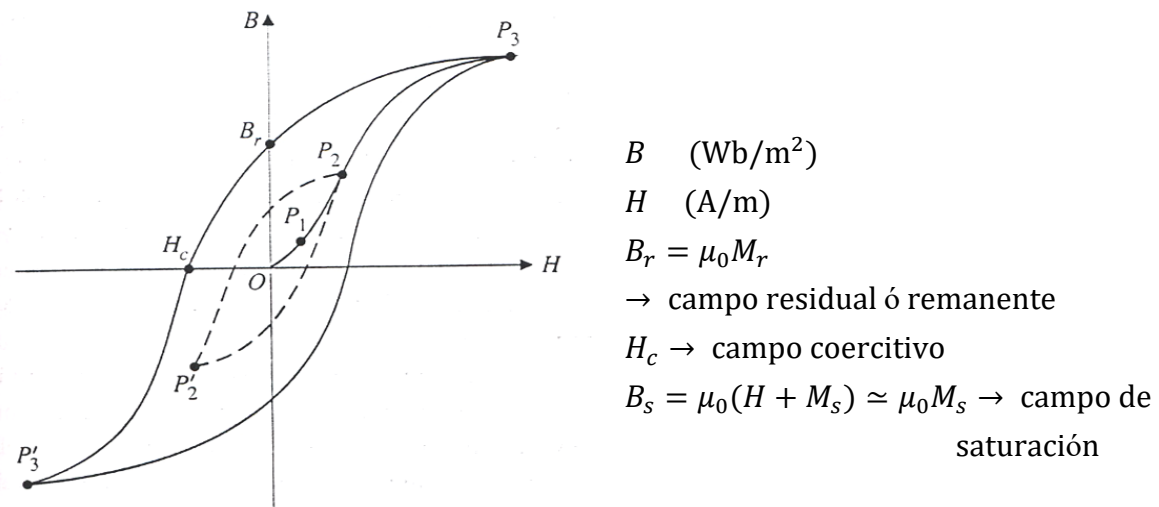
El diamagnetismo se debe principalmente al movimiento orbital de los electrones en el átomo mientras que el paramagnetismo se debe en gran medida a los momentos de “espín”.

El ferromagnetismo puede explicarse en función de la existencia de dominios magnetizados.



Estos dominios contienen entre 10^{15} y 10^{16} átomos y sus dimensiones varían desde las micras a los milímetros y están totalmente magnetizados como resultado del movimiento de “espín” de los electrones, incluso en ausencia de un campo magnético aplicado. Entre dominios adyacentes hay una región de transición llamada pared de dominio. En un estado no magnetizado, los momentos magnéticos de los dominios tienen direcciones aleatorias y no se produce una magnetización neta. Cuando se aplica un campo externo \vec{H} , las paredes de aquellos dominios que tienen momentos magnéticos alineados con el campo se mueven de manera que los volúmenes de estos dominios crecen a expensas de otros dominios, aumentando \vec{B} . Los movimientos de las paredes de los dominios son reversibles si el campo \vec{H} aplicado es débil (P_1). Sin embargo, si el campo aplicado es más fuerte, los movimientos de las paredes de los dominios ya no son reversibles y se produce una orientación del dominio en la dirección del campo aplicado (P_2). Si el campo aplicado se reduce a cero, la relación B-H no sigue la curva inicial, B disminuirá a lo

largo de otra curva, lo que implica que hay un retardo en la inversión de los dominios. Este efecto se conoce como histéresis.



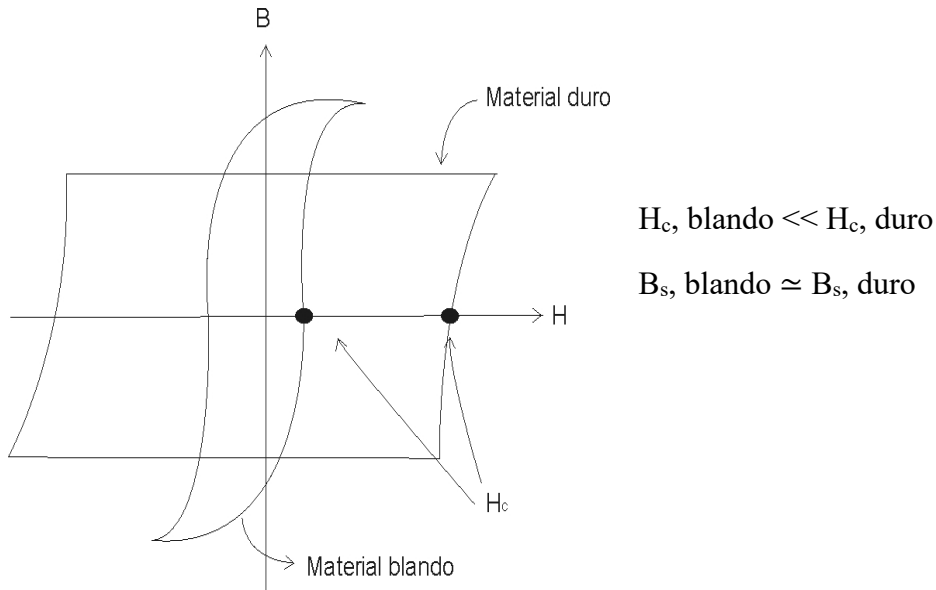
Si el campo aplicado es lo suficientemente fuerte, el movimiento de la pared de dominio y la rotación del mismo producirán una alineación total de los momentos magnéticos con respecto al campo aplicado. En este punto, se dice que el material ha llegado a la saturación (P_3).

La existencia de los imanes permanentes tiene su razón de ser en el hecho de que un material ferromagnético pueda presentar este denominado campo residual o remanente.

Según su aplicación, **los materiales ferromagnéticos se dividen en dos clases:** materiales magnéticos blandos y materiales magnéticos duros:

Los **materiales magnéticos blandos** se usan en generadores, motores y transformadores. Éstos deben presentar una magnetización muy grande como respuesta a un campo aplicado muy pequeño. Por lo tanto, primordialmente, se hace necesario que estos materiales cuenten con una curva de histéresis alta. Además de ello dicha curva debe de ser estrecha con el fin de minimizar las pérdidas por histéresis (energía perdida en forma de calor por unidad de volumen: Esta energía se debe a la fricción de las paredes de los dominios durante su movimiento y rotación y es igual al área de la curva de histéresis) ya que deben imanarse y desimanarse fácilmente. Es importante tener presente que al aplicar un \vec{H} que varía periódicamente entre $\pm \vec{H}_{max}$ se recorre la curva de histéresis una vez por ciclo.

Por otra parte, los **materiales magnéticos duros** vendrían representados por los buenos imanes permanentes. Dichos imanes deben presentar gran resistencia a la desmagnetización. Para ello estos materiales requieren un alto valor de campo coercitivo H_c y, por consiguiente, esto implica la aparición de curvas de histéresis más anchas.



Los dominios magnetizados se desorganizan si elevamos la temperatura de un material ferromagnético hasta un punto en el que la energía térmica excede la energía de acoplamiento de los momentos dipolares magnéticos. Si elevamos la temperatura por encima de la *Temperatura de Curie* (o temperatura crítica) un material ferromagnético se comporta como una sustancia paramagnética.

Las ferritas corresponden a otra clase de materiales magnéticos. Algunas ferritas son compuestos cerámicos con conductividades muy bajas lo que limita las pérdidas por corrientes parásitas a alta frecuencia. Las ferritas son comunes en aplicaciones de alta frecuencia (núcleos para antenas, transformadores,...). Las ferritas tienen una gran aplicación en el campo de la informática, ya que están presentes en dispositivos de memoria de núcleo magnético y en discos magnéticos.

4. Condiciones de contorno para los vectores \mathbf{B} , \mathbf{H} y \mathbf{M} .

Las condiciones en los límites para los vectores \vec{B} , \vec{H} y \vec{M} se calculan considerando las ecuaciones obtenidas en los apartados anteriores en la frontera que separa dos medios materiales, tanto en el caso de que $\vec{j} = 0$ o $\vec{j} \neq 0$.

4.1. Medios homogéneos, lineales e isotrópicos

En este caso las ecuaciones utilizadas son:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0; \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J}; \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad (4.1)$$

Aplicando la ecuación $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ a la caja cilíndrica, de altura h , indicada en la figura, se

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (4.2)$$

deduce que

La ecuación (4.2) expresa la continuidad de las componentes normales de \vec{B} en la frontera entre dos medios.

La ecuación constitutiva en cada medio es

$$\vec{B}_1 = \mu_1 \vec{H}_1; \quad \vec{B}_2 = \mu_2 \vec{H}_2 \quad \text{de donde} \quad \vec{H}_1 = \frac{\vec{B}_1}{\mu_1}; \quad \vec{H}_2 = \frac{\vec{B}_2}{\mu_2} \quad (4.4)$$

Sustituyendo las relaciones anteriores en la expresión (4.2) obtenemos

$$\vec{n} \cdot (\mu_2 \vec{H}_2 - \mu_1 \vec{H}_1) = 0 \quad (4.5)$$

Si aplicamos la ecuación $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$, o lo que es igual, la circulación sobre el circuito cerrado $MNPQ$ indicado en la figura, con $NP \rightarrow 0$ y $MQ \rightarrow 0$ y suponiendo que en la superficie de separación existe una densidad de corriente superficial \vec{K} , se llega a la siguiente expresión:

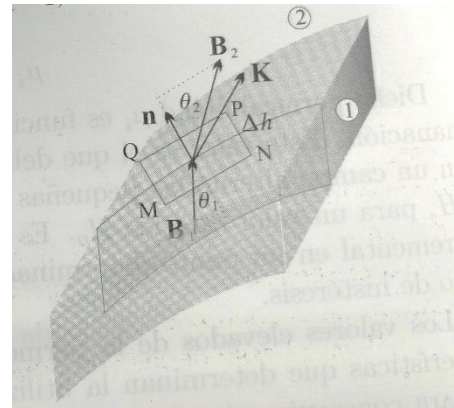
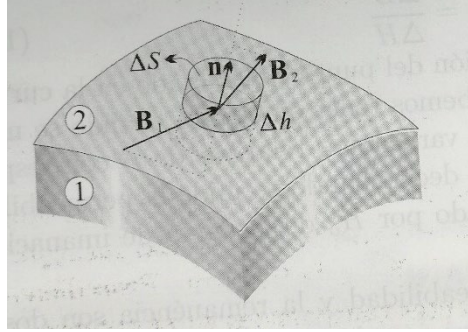
$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K} \quad (4.6)$$

Sustituyendo las ecuaciones constitutivas de cada medio (4.4) en la expresión anterior se obtiene:

$$\vec{n} \times \left(\frac{\vec{B}_2}{\mu_2} - \frac{\vec{B}_1}{\mu_1} \right) = \vec{K} \quad (4.7)$$

Si particularizamos para el caso en el que $\vec{K} = 0$ sobre la superficie de separación, las expresiones anteriores se simplifican de la siguiente forma:

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \quad (4.8)$$



$$\vec{n} \times \left(\frac{\vec{B}_2}{\mu_2} - \frac{\vec{B}_1}{\mu_1} \right) = 0 \quad (4.9)$$

La ecuación (4.8) expresa la continuidad de las componentes tangenciales de \vec{H} cuando $\vec{K} = 0$, al igual de que la continuidad de las componentes normales de \vec{B} son independientes del tipo de medio que consideremos.

4.2. Medios materiales con imanación M

En este caso siguen siendo válidas las ecuaciones (4.2), (4.6) y (4.8). Para encontrar el comportamiento de las componentes normales de \vec{H} , debemos aplicar $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ a $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$, de donde se deduce que $\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M}$, y utilizando una forma análoga de cálculo al caso de las componentes normales de \vec{B} , obtenemos la siguiente ecuación:

$$\vec{n} \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = -\vec{n} \cdot (\vec{M}_2 - \vec{M}_1) \quad (4.10)$$

Esta ecuación muestra que las fuentes del campo \vec{H} tienen su origen en la discontinuidad de \vec{M} .

El comportamiento de las componentes tangenciales de \vec{B} en la frontera entre dos medios se obtiene aplicando la expresión $\nabla \times \vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \vec{J}_m)$ con las siguientes densidades de corriente $\vec{K}_m = \vec{M} \times \vec{n}$ y \vec{K} en la frontera. Procediendo de forma análoga al caso de las componentes tangenciales de \vec{H} , obtenemos,

$$\vec{n} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0(\vec{K} + (\vec{M}_2 - \vec{M}_1) \times \vec{n}) \quad (4.11)$$

En el caso de que $\vec{K} = 0$,

$$\vec{n} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{n} \times (\vec{M}_1 - \vec{M}_2) \quad (4.12)$$

5. Circuitos magnéticos.

En la siguiente figura se muestra un circuito magnético simple y su circuito eléctrico equivalente. El sistema consiste en un aro (toroide) ferromagnético con un arrollamiento concentrado de N vueltas, dónde el flujo magnético está confinado en el interior del toroide

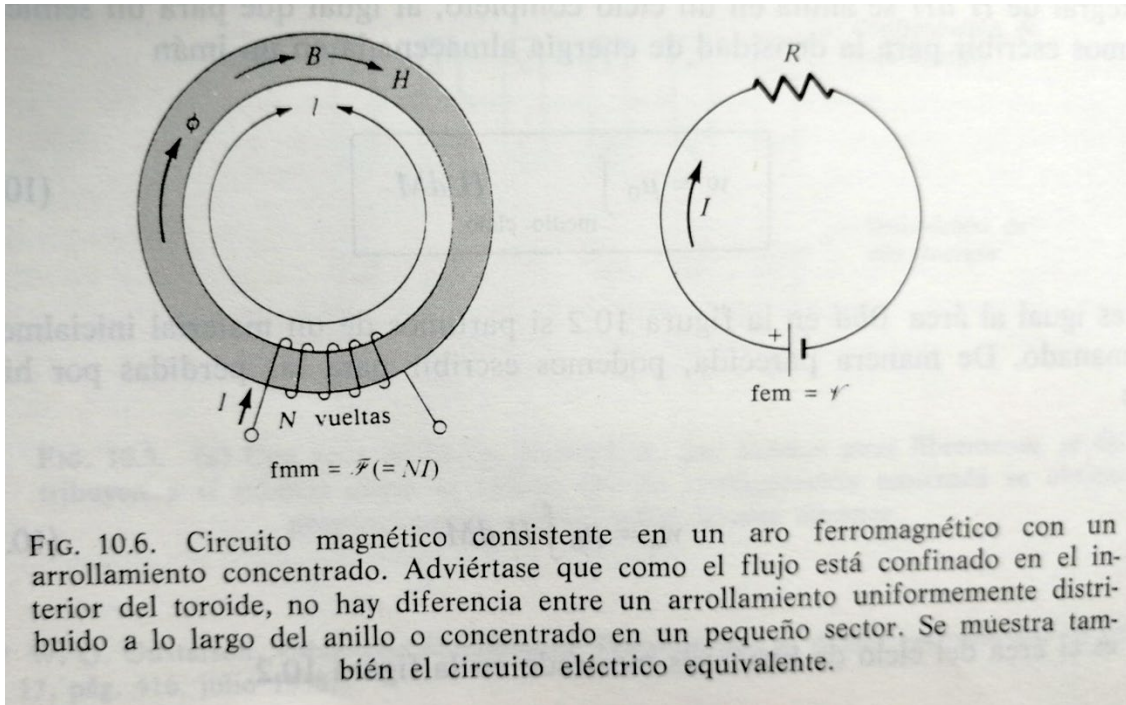


FIG. 10.6. Circuito magnético consistente en un aro ferromagnético con un arrollamiento concentrado. Adviértase que como el flujo está confinado en el interior del toroide, no hay diferencia entre un arrollamiento uniformemente distribuido a lo largo del anillo o concentrado en un pequeño sector. Se muestra también el circuito eléctrico equivalente.

Para el circuito eléctrico podemos escribir:

$$\text{Resistencia } R = \frac{\text{f.e.m.}}{\text{corriente}} = \frac{V}{I} = \frac{\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}} \quad (5.1)$$

Un circuito magnético también implica una fuente que establezca un flujo en torno al circuito magnético. A dicho flujo se opone la reluctancia, definida por:

$$\text{Reluctancia } R = \frac{\text{f.m.m.}}{\text{flujo}} = \frac{F(=NI)}{\phi} = \frac{\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l}}{\int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}} \quad (5.2)$$

La ley de Kirchhoff, para cualquier circuito eléctrico cerrado, establece que la suma de las variaciones de tensión en las fuentes y en las resistencias es igual a 0:

$$\sum V - \sum R I = 0 \quad (5.3)$$

De forma análoga, para todo circuito magnético cerrado, podemos escribir:

$$\sum NI - \sum R \phi = 0 \quad (5.4)$$

En todo nudo, al igual que tenemos $\sum I = 0$ para el circuito eléctrico, tendremos

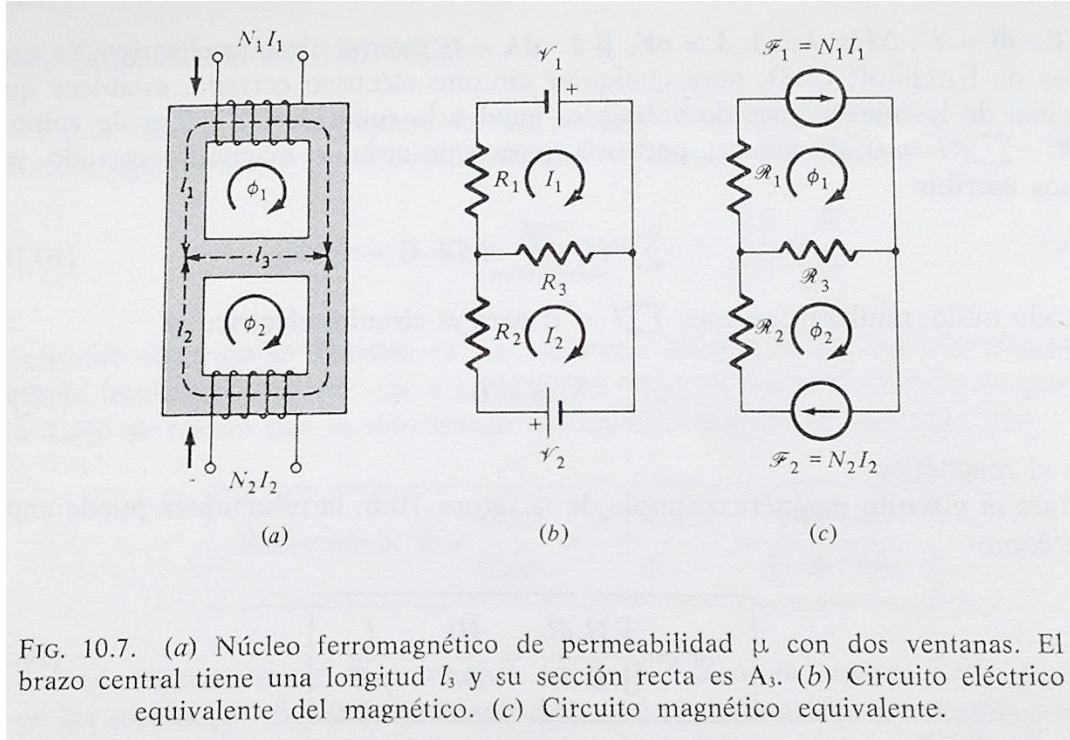
$$\sum \phi = 0 \quad (5.5)$$

para el magnético.

Para el circuito magnético de la figura anterior, la reluctancia puede expresarse como:

$$R = \frac{\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l}}{\int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}} = \frac{Hl}{BA} = \frac{l}{\mu A} \quad (5.6)$$

a causa de que el campo B y la sección recta A son uniformes. La longitud del camino l , de manera general, es la longitud del camino que recorre la parte media del hierro. Las dimensiones de μ son H/m, lo que da a la reluctancia R la dimensión de H^{-1} .



La figura 10.7 muestra un circuito más complicado y su equivalente eléctrico. Si somos capaces de encontrar las corrientes en el caso eléctrico, conoceremos los flujos magnéticos en las ramas del circuito magnético. Por ejemplo, si se aplica la ley de Kirchoff a la “malla” superior del circuito magnético se tiene que

$$N_1 I_1 = H_1 l_1 + H_1 l_3 - H_2 l_3 \quad (5.7)$$

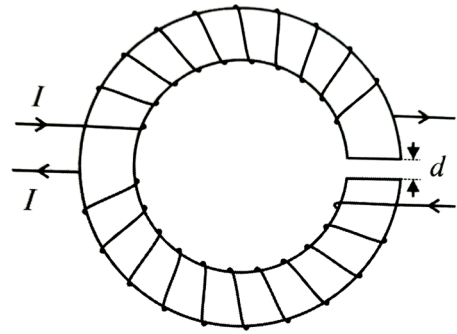
$$N_1 I_1 = R_1 \phi_1 + R_3 \phi_1 - R_3 \phi_2 = \frac{l_1}{\mu A_1} \phi_1 + \frac{l_3}{\mu A_3} \phi_1 - \frac{l_3}{\mu A_3} \phi_2 \quad (5.8)$$

Una aplicación de los circuitos magnéticos es preservar a un sistema de flujo magnético. Para ello, se debe rodear el sistema con un material que presente una muy alta permeabilidad en comparación con la del material del que está constituido dicho sistema. De ese modo, mediante una geometría apropiada, las líneas de campo pasarán fundamentalmente por el material de alta permeabilidad, aislando magnéticamente al material interior, puesto que se vería liberado de líneas de campo.

ANALOGÍAS DE LAS MAGNITUDES DE LOS CIRCUITOS ELÉCTRICOS Y MAGNÉTICOS

<i>Eléctrico</i>	<i>Magnético</i>	<i>Equivalencias</i>
$\nabla \times \vec{E} = 0$	$\nabla \times \vec{H} = 0$	$\vec{E} \rightarrow \vec{H}$
$f.e.m = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$	$f.m.m = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l}$	$f.e.m \rightarrow f.m.m$
$\vec{J} = \sigma \vec{E}$	$\vec{B} = \mu \vec{H}$	$\sigma \rightarrow \mu$
$\nabla \cdot \vec{J} = 0$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\vec{J} \rightarrow \vec{B}$
$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$	$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$	$I \rightarrow \phi$

Si tenemos un electroimán (ver figura) formado por dos bobinas enrolladas alrededor de un núcleo de hierro dulce (la permeabilidad casi se puede considerar constante), hacemos un pequeño corte transversal de longitud d en el núcleo y consideramos que en el espacio entre las dos caras de dicho corte tenemos que $\mu = \mu_0$, podemos establecer, de acuerdo con el teorema de Ampère que



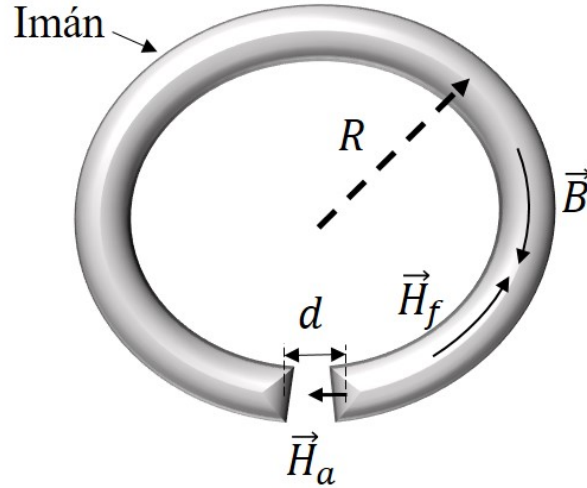
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI \Rightarrow H_f(L - d) + H_a d = \frac{B_f}{\mu}(L - d) + \frac{B_a}{\mu_0} d = NI \quad (5.9)$$

donde B_a es el campo presente en el espacio donde se ha realizado el corte y B_f es el campo en el interior del núcleo. Por continuidad de \vec{B}_\perp y asumiendo que no hay pérdidas de flujo magnético, i.e. que $B_f = B_a = B$, entonces se obtiene que

$$B = \frac{\mu\mu_0 NI}{\mu_0 L + d(\mu - \mu_0)} \quad (5.10)$$

Circuito magnético con un imán permanente

El circuito magnético con imán permanente vendría representado por un sistema con ranura e imán permanente, como muestra la siguiente figura



Al igual que en el caso del electroimán, sabiendo que $B_a = B_f = B$ y a partir de (5.9), se obtiene

$$H_f(L-d) + H_a d = \frac{B}{\mu}(L-d) + \frac{B}{\mu_0}d = 0 \quad (5.11)$$

De este modo,

$$B = -\frac{\mu_0}{d}(L-d)H_f, \quad (5.12)$$

que definirá una relación lineal entre B y H_f denominada “recta de corte” con pendiente negativa.

La recta de corte también puede ser expresada como

$$H_f = \frac{-d}{\mu_0(L-d)}B. \quad (5.13)$$

De este modo, la imanación en el imán vendrá dada por

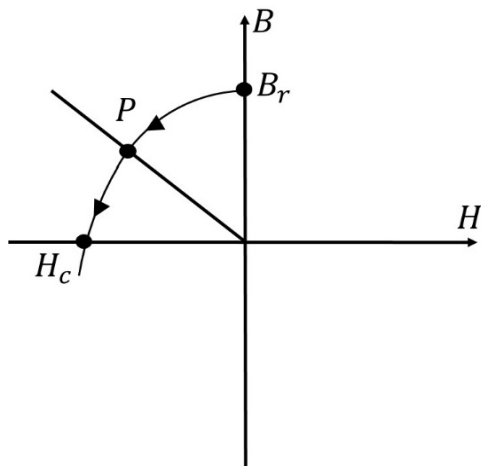
$$M = \frac{B}{\mu_0} - H_f = \frac{L}{L-d} \frac{B}{\mu_0}, \quad (5.14)$$

a partir de lo cual se puede concluir que \vec{H}_f presenta un sentido contrario a \vec{B} y \vec{M} en el imán.

Si se interseca dicha recta de corte con la curva de histéresis (B en función de H), el punto resultante (ilustrado como punto P en la figura) pertenecería al segundo cuadrante. Consecuentemente, puede deducirse que el punto de trabajo de los imanes permanentes está siempre en el segundo cuadrante. Dicho punto depende del espesor de la ranura d , la longitud L y la forma de la curva de imanación. Entonces, a mayor valor de la remanencia (B_r) y cuánto más grande sea la anchura del ciclo (i.e., mayor campo coercitivo H_c), más elevado resultará el campo B que corresponde a dicho punto.

Por otro lado, cuando estamos ante $L \gg d$, la recta de corte presentará una pendiente mucho más grande y, consecuentemente el punto P se producirá a valores altos de B y pequeños de H_f . Esta sería la razón por la cual los imanes permanentes presentan forma de herradura, ya que, de este modo, se generaría un valor grande de B en la ranura y un campo H_f pequeño (que tendería a desimanar el material, ya que presenta un signo contrario a la imanación M).

Dicho todo lo anterior, la curva de desimanación podría ilustrarse como

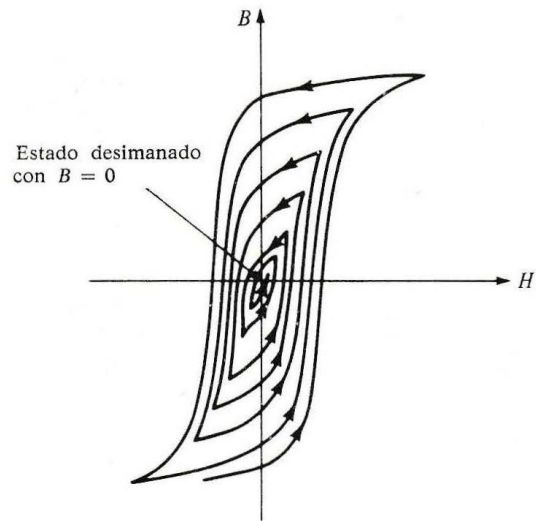


$P \rightarrow$ función del espesor de la ranura d , la longitud L y la forma de la curva de imanación.

Si en la ranura colocamos una chapa de material cuya permeabilidad $\mu \gg \mu_0$, según la ecuación (5.12) aumentaría la pendiente, lo que supondría un aumento de la B y disminución del campo desimanador H_f .

Desimanación

Si se desea desimanar un imán permanente, este proceso puede realizarse mediante calentamiento o sacudiendo bruscamente al imán. Sin embargo, un método más adecuado se basa en desimanar o reducir el magnetismo remanente por aplicación de un campo B alterno que disminuya en amplitud. Dicho proceso de desimanación se ilustra en la figura siguiente, donde se puede observar cómo, tras la modificación paulatina del campo al que se somete un dispositivo a desimanar, este alcanzará un estado desimanado con $B = 0$ a causa de que la imanación M se ha reducido a cero.



Un objeto que ha adquirido una imanación permanente, puede desimanarse por aplicación de un campo magnético decreciente.